

高速フーリエ逆変換の汎用バージョンは計算効率が良い

フーリエ変換は、数学的操作である。これにより、例えば、画像の空間周波数成分を決めることができる。その逆は、直接的にフーリエ逆変換 (IFFT) と言われている。これらの操作の両方とも、オプティクスとフォトニクスの基礎である。フーリエ変換を実用形式で実装するアルゴリズムである高速フーリエ変換 (FFT) とその逆アルゴリズムの IFFT は、画像圧縮をはじめとして、ファイバオプティックエンコーディング、波面センシング、光スペクトル解析、インターフェログラム解析、振動制御、分光学など、さらに多くのアプリケーションで利用されるようになってきている。

上述の一連のデータとそのフーリエ変換との密接な関係の例では、線広がり関数は、所定のレンズでは、暗い背景で無限に明るい細い直線のレンズ画像の断面強度トレースである。これは、フーリエ変換して 1D 変調伝達関数 (MTF) になる。つまり、ゼロから上昇する空間周波数を撮像するレンズ機能を示すプロットである。

FFT アルゴリズムは、1955 年に発表された。4 年後、研究者たちは、さらに汎用性が高く、一般的なチャープ Z 変換 (CZT) を開発したが、IFFT アルゴリズムと同様の一般化は、50 年間未解決のままだった。今回、アレクサンダー・ストイチェフ氏 (Alexander Stoytchev) とウラジミール・スホイ氏 (Vladimir Sukhoy) という米アイオワ州立大の 2 人の研究者が、念願のアルゴリズム、逆チャープ Z 変換 (ICZT) を開発した⁽¹⁾。

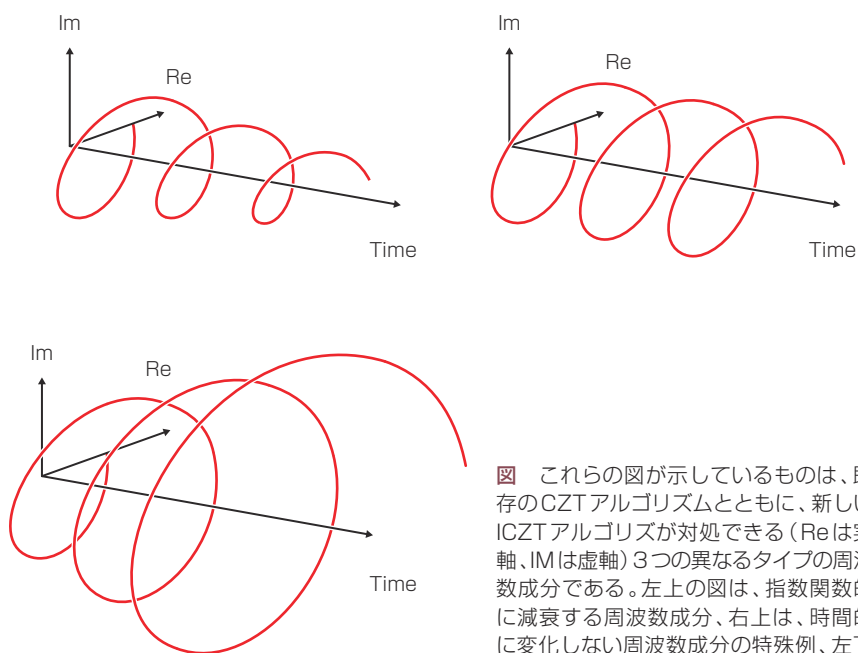


図 これらの図が示しているものは、既存の CZT アルゴリズムとともに、新しい ICZT アルゴリズムが対処できる (Re は実軸、Im は虚軸) 3 つの異なるタイプの周波数成分である。左上の図は、指数関数的に減衰する周波数成分、右上は、時間的に変化しない周波数成分の特殊例、左下は、指数関数的に増加する周波数成分。

光学計算にとっての利点

すべてのアルゴリズム同様、ICZT は、問題を解く段階的なプロセスである。この場合、CZT アルゴリズム出力を写像してその入力に戻す。そのアルゴリズムは、計算の複雑さ、あるいは、その対応するもののスピードを一致させ、数値精度がテストされており、IFFT と違い、指数関数的減衰、あるいは増え続ける周波数成分で利用可能である (図参照)。最後の点は、重要である。それによってエバネセント電磁波に依存する近接場光伝搬の計算ができるようになるからである。

スホイ氏によると、逆アルゴリズムはオリジナル、フォワードアルゴリズム

よりも難しい。つまり、「それに取り組むには、より高精度で強力なコンピュータが必要だった」ということだ。また、同氏は、重要な点は構造化行列の数学的枠内でそのアルゴリズムを見ることだったと話している。ICZT アルゴリズムの精度は、自動テストによって決まった。

新開発の ICZT アルゴリズムには、いわゆる $O(n \log n)$ 複雑性があり、これは既存の CZT や IFFT アルゴリズムの計算複雑性と一致する。言い換えると、ICZT アルゴリズムを一般化しようとする以前の試行と違い、それほど計算複雑性はない。

(John Wallace)

参考文献

(1) V. Sukhoy and A. Stoytchev, Sci. Rep. (2019); <https://doi.org/10.1038/s41598-019-50234-9>.