立ち上がり時間対帯域幅と適用

～簡単で実用的な数学を用いたモデルにより、信号の立ち上がり時間と測定機器の使用する帯域幅の関連を可能に～

Mekonen Buzuayene
Anritsu Corporation
Morgan Hills, CA

オシロスコープやスペクトラムアナライザーのような測定装置では、装置の -3 dB 帯域幅（B）が、最大立ち上がり時間（t_r）の測定精度に直接関わっている。立ち上がり時間は、通常、安定した最大値の 10% ～ 90% の信号の変化時間として規定される（図1参照）。しかし、帯域幅は信号のエネルギーの大部分が含まれている周波数の範囲を示している。特に、信号の周波数レスポンスが 3 dB 低下する周波数範囲として定義されている。単極のハイパスを想定した周波数レスポンスを図2に示す。

工学測定環境下では、どんな装置を使用しているかにもよるが、両方の用語（立ち上がり時間と帯域幅）が互換性のある使い方をされているのをよく耳にする。その関係はほとんどのオシロスコープのカタログに通常記載されていて、技術的なハンドブックは以下の等式に基づいている。

$$t_r = 0.35/B \text{ (MHz)} \qquad (1)$$

もっともよくある質問は、等式のタイムドメイン（立ち上がり時間）と周波数ドメイン（帯域幅）の関係は？0.35 の根拠は？いったいどうやってこの等式を導いたのか？ということである。

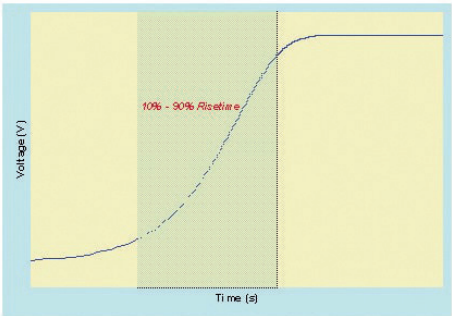

図1. インパルス入力のタイムドメインレスポンス

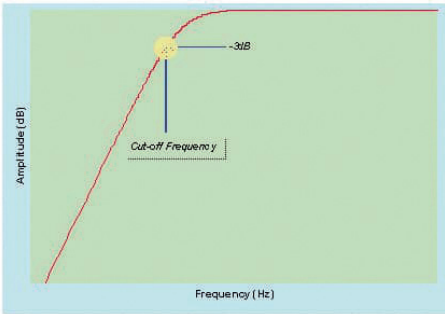

図2. インパルス入力の周波数ドメインレスポンス

その関係はどうやって発生したのか？

等式（1）を理解するのにベストな方法は、電気的にパッシブなフィルタを考慮することである。この方法で正確な値が引き出せる。代わりにガウス分布やフーリエの法則の拡張など他の方法での解析を求めることもできるが、それぞれ 2.9% と 8.6% の誤差が出る。

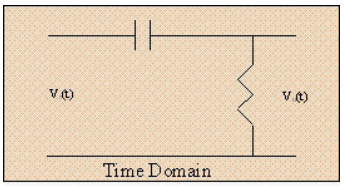

図3. R-C 概略－タイムドメイン

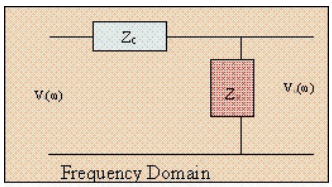

図4. R-C 概略－周波数ドメイン

この関係を検証するため、我々は簡単な1段で構成されるローパス、ハイパスまたはバンドパスを使用する。それらの位相のために特定の構成を用いる必要はない。並列でも直列でもよく、回路構成も R-C、R-L、R-L-C など、どんな型でもよい。なぜ t_r の等式（1）が正確なのかということを証明する目的で、図3に示すような、簡単な R-C の回路図で時間と周波数ドメインを考えてみよう。

回路の解析

リニア回路解析の基礎とキルヒホッフの法則の概念を用いて、図3、図4のタイムドメインと周波数ドメインのふるまいを解析するためメッシュおよびノーダル解析の手順を使用する。

タイムドメイン解析

上記のトポロジーのそれぞれの出力の式を書いてこの解析に取りかかる。

$$V_R(t) = V_i(t) - V_c(t) \qquad (2)$$

1次微分方程式で次のようになる。

$$V_R(t) = V_i(t)\left[1-\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right] \qquad (3)$$

時間の関数である入力電圧を仮定し、t を求めることによってレスポンススピードを簡単に求めることができる。

RC を回路応答時間τに置き換え、t について解く。

$$\frac{V_R(t)}{V_i(t)} = \left[1-\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] \qquad (4)$$

$$1-\left[\frac{V_R(t)}{V_i(t)}\right] = \left[\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] \qquad (5)$$